الفصل الأول

المصفوفات

يعتــبر حساب المصفوفات من المسائل الحديثة الضرورية حيث أنها ترتبط بحل جمل المعــادلات الخطــية وتسهل لنا العديد من المسائل الرياضية، وأيضاً ساهمت في كثير من المواضيع المختلفة مثل علم الإحصاء والكيمياء والكهرباء.

1- 1-تعاريف:

1-تعريف المصفوفة:

المصــفوفة هي مجموعة$(m.n)$ من العناصر موضوعة في جدول مرتبة من m سطر و n عمود ومحاطة بقوسين وحيث n و m عددان صحيحان موجبان.

عــادة يرمــز للمصفوفات بأحرف لاتينية كبيرة ولعناصرها بأحرف لاتينية صغيرة. فنكتب مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

هذه المصفوفة A سعتها (مرتبتها) $m\times n$.

والشكل المختصر لكتابة المصفوفة هو:

$$A=[a_{ij}]_{(m,n)}$$

حيث أن: a_{ij} هو العنصر العام في المصفوفة من السطر i و العمود j، وحيث أن :

$$i=1,2,\ldots,n$$

$$j=1,2,\ldots\ldots,m$$

الدليل الأول i يشير إلى رقم السطر بينما j يشير إلى رقم العمود الذي يقع فيه هذا العنصر.

في الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون عناصر المصفوفة أعداداً فربما تكون توابع أو كثيرات جدود أو......

لكننا سنقتصر في دراستنا على المصفوفات العددية فقط.

2-نقول عن المصفوفتين A و B أن لهما نفس السعة $(m\times n)$ مثلاً،إذا حوت كل منهما عدداً من الأسطر يساوي m وعدداً من الأعمدة يساوي n .

3-تساوي مصفوفتين:

نقول عن المصفوفتين:

$$B=[b_{ij}]_{(m,n)} \quad و \quad A=[a_{ij}]_{(m,n)}$$

أنهما متساويتين إذا كان: $a_{ij}=b_{ij}$ من أجل جميع الأدلة:

$$i=1,2,....,n \quad , \quad j=1,2,......,m$$

ونكتب عندها أن: $A=B$.

مثال-1-

إذا كان:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$a_{11}=2, a_{12}=1, a_{21}=0, a_{22}=-1, a_{31}=3, a_{32}=2$$

4-منقول المصفوفة:

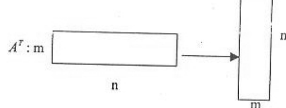
إن منقول المصفوفة A هو مصفوفة جديدة نرمز لها بالرمز A^T ونحصل عليها بوضع أسطر المصفوفة A أعمدة و الأعمدة أسطر مع الحفاظ على ترتيب هذه الأسطر والأعمدة.أي أن منقول المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ هو المصفوفة $A^T=[a_{ji}]_{(n,m)}$.

مثال-2-

إن منقول المصفوفة: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}_{(3,2)}$

هو المصفوفة: $A^T=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2,3)}$

والشكل التالي يمثل منقول مصفوفة:



5-المصفوفة الحقيقية و المصفوفة العقدية:

تكون المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ حقيقية إذا كانت مصفوفة فوق حقل الأعداد الحقيقية R أي أن $a_{ij}\in R$ من أجل جميع قيم i,j الصحيحة الموجبة.

وتكون المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ عقدية إذا كان أحد عناصرها على الأقل عدداً عقدياً.

مثال-3-

إن المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة حقيقية سعتها هي: 2×4 .

بينما المصفوفة

$$B=\begin{bmatrix} 1+i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 1-i \\ -2 & 1+i & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة عقدية سعتها هي: 3×3 .

6-مرافق مصفوفة:

ليكن لدينا مصفوفة عقدية $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ نسمي المصفوفة المرافقة للمصفوفة A ونرمز لها بالرمز $\overline{A}$ المصفوفة التالية: $\overline{A}=[\overline{a}_{ij}]_{(m,n)}$،حيث أن العنصر $\overline{a}_{ij}$ هو مرافق العنصر a_{ij} ،ونرى أنه للمصفوفة $\overline{A}$ نفس سعة المصفوفة A .

2-1-أنواع المصفوفات:

1-المصفوفة الصفرية:

المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي كل عنصر من عناصرها يساوي الصفر، ونرمز لها بالرمز O .

مثال-4-

أكتب المصفوفات الصفرية التالية:

$$O_{(3,1)} \ , O_{(1,3)} \ , O_{(2,2)}$$

$$O_{(3,1)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ O_{(1,3)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ O_{(2,2)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2-المصفوفة المستطيلة والمصفوفة المربعة:

نسمي المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ مستطيلة إذا كان عدد أسطرها m يختلف عن عدد أعمدتها n أي: $m\neq n$.

كما نسمي المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ مصفوفة مربعة إذا كان عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها أي: $m=n$ ، وعندئذ نقول أنها مصفوفة مربعة من المرتبة n ونرمز لها بالرمز $A=[a_{ij}]_{(n,n)}$.

إن العناصر: $a_{11}, a_{22}, a_{33},........, a_{nn}$ تسمى عناصر القطر الرئيسي وهي العناصر الواقعة على القطر الممتد من الزاوية العليا اليسرى وحتى الزاوية السفلى اليمنى،أما القطر الآخر فيسمى القطر الثانوي.

مثال-5-

المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{(4,4)}$$

مصفوفة مربعة من المرتبة الرابعة،عناصر قطرها الرئيسي هي:

$$a_{11}=2, a_{22}=0, a_{33}=-1, a_{44}=6$$

3-المصفوفة القطرية:

هي المصفوفة المربعة $A=[a_{ij}]_{(n,n)}$ حيث أن: $a_{ij}=0$ عندما $i\neq j$.أي أن جميع عناصر المصفوفة أصفار، عدا عناصر القطر الرئيسي التي هي:

$$a_{11}, a_{22}, a_{33},........, a_{nn}$$

وتكتب أحياناً بالشكل المختصر التالي:

$$A = diag\ (a_{11}, a_{22}, a_{33},........, a_{nn})$$

مثال-6-

المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة قطرية من المرتبة الثالثة.

4-المصفوفة السلمية:

نسمي المصفوفة المربعة مصفوفة سلمية من المرتبة n إذا كانت مصفوفة قطرية (من المرتبة n) ،وإذا كانت عناصر قطرها الرئيسي متساوية وشكلها العام هو:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

5-المصفوفة الواحدية:

المصـــفوفة الواحديـــة هي مصفوفة قطرية وكل من عناصر قطرها الرئيسي يساوي الواحد.أو يمكن القول بأنها سلمية فيها $\lambda = 1$.

مثال-7-

المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة سلمية فيها:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases}$$

وبالتالي فهي مصفوفة واحدية ويرمز لها بالرمز I_n .

6-مصفوفة السطر(الشعاع السطري):

إذا كانــت المصفوفة مؤلفة من سطر واحد وعدة أعمدة تسمى عندئذ **الشعاع السطري** وتكتب بالشكل:

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad \dots \quad a_{1n}]$$

7-مصفوفة العمود(الشعاع العمودي):

إذا كانــت المصفوفة مؤلفة من عمود واحد وعدة أسطر تسمى عندئذ **الشعاع العمودي** وتكتب بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

8-المصفوفة المتناظرة:

لتكــن المصفوفة $A = [a_{ij}]_{(n,n)}$ مصفوفة مربعة فيها n سطراً و n عمود.نسمي المصفوفة A مصفوفة متناظرة إذا كان:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

وذلك من أجل جميع قيم j , i .

كمــا نسمي المصفوفة $A = [a_{ij}]_{(n,n)}$ المربعة من المرتبة n مصفوفة متناظرة إذا وفقط إذا كانت تساوي منقولها A^T ونكتب ذلك بالشكل:

$$A = A^T \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

وتسمى المصفوفة A متناظرة يسارياً عندما $A = -A^T$.

أي:

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

وذلك من أجل جميع قيم j , i .

مثال-8-

إن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

متناظرة لأن:

$$A = A^T$$

والمصفوفة:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

متناظرة يسارياً لأن: $B = -B^T$.

9- المصفوفة المثلثية العليا:

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة تحت قطرها الرئيسي تساوي الصفر،أي أن $a_{ij} = 0$ عندما $i > j$ في المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]_{(n,n)}$.مثلاً المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مثلثية عليا من المرتبة الرابعة.

10-المصفوفة المثلثية السفلى:

هـــي مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة فوق قطرها الرئيسي تساوي الصفر،أي أن $a_{ij} = 0$ عندما $i < j$ في المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]_{(n,n)}$.

مثلاً المصفوفة:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -i & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مثلثية سفلى من المرتبة الثالثة.

واضـــح أن المصـــفوفة القطـــرية هي مصفوفة مثلثية عليا ومصفوفة مثلثية سفلى بآن واحد.

11-المصفوفة الجزئية:

لتكــن $A = [a_{ij}]_{(m,n)}$ مصـــفوفة مـــن المرتبة $m \times n$ نسمي المصفوفة الناتجة عن المصـــفوفة A بحـــذف عـــدد مـــن أسطرها وعدد من أعمدتها مصفوفة جزئية من المصفوفة A ، مثلاً المصفوفة:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة جزئية من المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

12-المصفوفة الهرميتية:

لتكــن المصـــفوفة $A = [a_{ij}]_{(n,n)}$ مصـــفوفة عقديـــة مـــربعة من المرتبة n .نسمي المصفوفة A مصفوفة هرميتية إذا تحقق الشرط التالي:

$$A = \overline{A}^T$$

أي أن:

$$a_{ij} = \overline{a}_{ji}$$

وذلك من أجل جميع قيم j , i .

ملاحظة(١):

بما أن مرافق العدد الحقيقي هو نفسه ، يكون من أجل المصفوفة الحقيقية A المساواة التالـــية صـــحيحة $A = \overline{A}$ ،وبالتالي المصفوفة الهرميتية يجب أن تكون عناصر القطر الرئيسي أعداداً حقيقية.

مثال-9-

المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i & 1-2i \\ 2-i & -2 & -i-1 \\ 1+2i & i-1 & 3 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة هرميتية لأن:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2-i & 1+2i \\ 2+i & -2 & i-1 \\ 1-2i & -i-1 & 3 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$A=\overline{A}^T=\begin{bmatrix}1 & 2+i & 1-2i\\ 2-i & -2 & -i-1\\ 1+2i & i-1 & 3\end{bmatrix}$$

1-3-العمليات الجبرية على المصفوفات:

1- جمع المصفوفات:

ليكـن لدينا مصفوفتين لهما نفس السعة: $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ و $B=[b_{ij}]_{(m,n)}$

إن مجموع المصفوفتين A و B هو بالتعريف مصفوفة جديدة:

$$C=[c_{ij}]_{(m,n)}$$

سعتها هي نفس سعة المصفوفتين A و B ومعرفة بالشكل:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad ; i=1,2,....m \ , \ j=1,2,........n$$

ونكتب:

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]=[c_{ij}]=C$$

مثال-10-

أوجد مجموع المصفوفتين A و B حيث :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

– إن عملية جمع المصفوفات تتمتع بالخواص التالية:

١- عملية جمع المصفوفات تبديلية : $A+B=B+A$.

٢-عملية جمع المصفوفات تجميعية: $A+(B+C)=(A+B)+C$.

٣-يوجد عنصر حيادي (O هي المصفوفة الصفرية) بحيث:

$$A+O=O+A=A$$

٤- منقول مجموع مصفوفتين يساوي إلى مجموع منقولي المصفوفتين أي:

$$(A+B)^T=A^T+B^T$$

ه - لكل مصفوفة نظير بالنسبة لعملية الجمع وهي $(-A)$ حيث :

$$A=(-A)=(-A)+A=O$$

مثال-11-

إذا كانت :

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 7\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}5 & 1 & -2\\ 7 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

فإن:

$$A+B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}=B+A$$

وكذلك فإن:

$$A^T=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad B^T=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\\ 7 & 0\end{bmatrix}$$

ومنه يكون:

$$A^T+B^T=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 2\\ 6 & 1\end{bmatrix}=(A+B)^T$$

وبما أن:

$$B+C=\begin{bmatrix}7 & 5 & 5\\ 10 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

فإن:

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}9 & 6 & 4\\ 10 & 6 & 4\end{bmatrix}=A+(B+C)$$

والشكل التالي يمثل عملية الجمع:

A+B: m [ ] + m [ ] = [ ] m

n n n

2- طرح المصفوفات:

بشكل مشابه لعملية جمع المصفوفات يمكن تعريف طرح المصفوفات بالشكل:

$$A-B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=$$

$$=[a_{ij}-b_{ij}]=[c_{ij}]=C$$

λ(A·B)= (λA)B=A(λB)

3- ضرب المصفوفة بمقدار سلمي لا يساوي الصفر:

لتكـن $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ مصـفوفة مـن المرتـبة $m\times n$ و ليكن k عدد كيفي.نسمي المصـفوفة الـناتجة من ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة A بالعدد k جداء المصفوفة A بالعدد k ونرمز لها بالرمز $k.A$ ومنه نجد:

$$k.A=k.[a_{ij}]_{(m,n)}=[k.a_{ij}]_{(m,n)}$$

فمثلاً:

$$6.\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\times3 & 6\times2\\ 6\times5 & 6\times(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & 12\\ 30 & -12\end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن ضرب أي مصفوفة بعدد من اليسار يساوي ضربها من اليمين أي أن:

$$k.A=A.k$$

*إن عملية ضرب مصفوفة بعدد k تتمتع بالخواص التالية:

أ- $I.A=A$.

ب- $O.A=O$.

جـ- $\alpha(\beta.A)=(\alpha.\beta).A$.

د- $(\alpha+\beta).A=\alpha.A+\beta.A$.

هـ- $\alpha(A+B)=\alpha.A+\alpha.B$.

وحيث أن A,B مصفوفتان من نفس المرتبة و α,β عددان سلميان.

والشكل التالي يمثل ضرب مصفوفة بعدد سلمي:

c.A: m [ ] → [ ] m

n n

4-جداء المصفوفات:

إن جـداء مصـفوفتين يتعرف فقط إذا كان عدد الأعمدة في المضروب الأول يساوي عدد الأسطر في المضروب الثاني.

تعريف-١-

إذا كانـت $A=[a_{ik}]$ مصـفوفة سعتها $m\times p$ و $B=[b_{kj}]$ مصفوفة أخرى سعتها $p\times n$ ، فـإن الجداء $A\times B$ للمصفوفة A في المصفوفة B (A المضروب الأول و B المضـروب الثانـي) هـو مصفوفة $C=[c_{ij}]$ سعتها $m\times n$ حيث أن عناصر المصفوفة C معرفة بالشكل:

$$c_{ij}=a_{i1}.b_{1j}+a_{i2}.b_{2j}+......+a_{ip}.b_{pj}= \quad ;\begin{cases} i\in(1,2,......m)\\ j\in(1,2,........n)\end{cases}$$

$$=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}.b_{kj}$$

بشـكل آخـر يمكنـنا القول أن العنصر c_{ij} الذي يقع على السطر i والعمود j في مصفوفة الجداء $A\times B$ يساوي مجموع جداءات عناصر السطر i للمضروب الأول A مع العناصر المقابلة في العمود j للمضروب الثاني B .

(أنظر الشكل (1) الموضح لطريقة إيجاد العنصر c_{ij}) .

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

الشكل(1)

إن المصفوفة الناتجة C سعتها $m \times n$ ونعبر عن الجداء بالشكل المختصر التالي:

$$[a_{ik}]_{(m,p)} \times [b_{kj}]_{(p,n)} = [c_{ij}]_{(m,n)}$$

والشكل الآتي يمثل عملية جداء مصفوفتين ومنقول مصفوفة:

AB: m [ ] · [ ] k = [ ] m

k n n

الشكل(2)

مثال-12-

بفرض أن:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

أوجد $A \times B$.

الحل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y - z \\ 3x - 2y + z - w \\ 4x + 2y + 3w \end{bmatrix}$$

مثال-13-

أوجد جداء المصفوفتين:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{(3,2)} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{(2,2)}$$

الحل:

إن المصـــفوفتين A, B متوافقـــتان بالنسبة للضرب لأن عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B والجداء يساوي:

$$A \times B = \begin{bmatrix} (2)(2)+(-1)(0) & (2)(1)+(-1)(3) \\ (0)(2)+(3)(0) & (0)(1)+(3)(3) \\ (1)(2)+(4)(0) & (1)(1)+(4)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 9 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}$$

مثال-14-

أوجد جداء المصفوفتين : $A_{(3,2)} \times B_{(5,3)}$.

إن الجداء غير معرف لأن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد أسطر المصفوفة B .

-إن عملية جداء المصفوفات تتمتع بالخواص التالية:

مـــن تعـــريف جـــداء مصـــفوفتين ينتج أن: $A.B \neq B.A$ أي أن الجداء عملية ليست تبديلـــية.فـــي حـــالات خاصة قد يكون $A.B = B.A$ ، وعندها نقول إن المصفوفتان متبادلتان.

مثال-15-

إذا كانت المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 9 & -10 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & -21 & 28 \end{bmatrix}$$

أوجد الجداء $A.B$ و الجداء $B.A$.

الحل:بحساب بسيط نجد أن:

$$A.B = \begin{bmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{bmatrix} = B.A$$

أ-الضرب في المصفوفات تجميعي:أي إذا كان لدينا المصفوفات:

$$A = [a_{is}]_{(m,p)} \quad , \quad B = [b_{sk}]_{(p,q)} \quad , \quad C = [c_{kj}]_{(q,n)}$$

فإن:

$$(A.B).C = A.(B.C)$$

مثال-١٦-

إذا كانت :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن : $(A.B).C = A.(B.C)$.

الحل :

إن :

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

إذاً :

$$(A.B).C = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 20 & 13 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ومن ناحية ثانية فإن :

$$B.C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ومنه يكون :

$$A(B.C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن :

$$(A.B).C = A.(B.C)$$

جـ-جداء المصفوفات توزيعي بالنسبة لجمع المصفوفات:

إذا كانـــت المصـــفوفة A مـــتوافقة للضرب مع كل من المصفوفتين B و C بالنسبة للضرب عندئذ يكون:

$$A.(B + C) = A.B + A.C$$

د- مـــنقول جـــداء مصـــفوفتين يساوي جداء منقولي هاتين المصفوفتين ولكن بترتيب عكسي أي:

$$(A.B)^T = B^T.A^T$$

هـ-إن المصفوفة الواحدية I_n هي العنصر الحيادي بالنسبة لعملية جداء المصفوفات، أي إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإن:

$$A.I_n = I_n.A = A$$

و- إذا كان λ مقداراً سلمياً و A, B مصفوفتين متوافقتين للضرب فإن:

$$\lambda (A.B) = (\lambda.A).B = A.(\lambda.B)$$

1-4-قوى مصفوفة:

نلاحـــظ من تعريف الجداء أن الشرط اللازم والكافي لإمكانية ضرب مصفوفة بنفسها هو أن تكون هذه المصفوفة مربعة.

- سندخل الآن مفهوم رفع مصفوفة لقوة صحيحة غير سالبة.

مــن أجل هذا نأخذ A مصفوفة مربعة من المرتبة n ، ونعرف المصفوفة A^k (k عــدد صحيح غير سالب) بأنها المصفوفة الناتجة عن ضرب المصفوفة بنفسها k مرة أي:

$$A^k = \underbrace{A.A..............A}_{k}$$

وبمــا أن جــداء عــدة مصفوفات لا يتعلق بطريقة توزيع الأقواس في هذا الجداء فإن المصفوفة A^k تتعين بشكل وحيد ويصطلح عادة على أن:

$$A^0 = I$$

وبالاعــتماد علــى الخاصــة التجميعية فإنه يمكن التحقق و بسهولة من صحة العلاقات التالية:

$$A^S.A^L = A^{S+L} = A^{L+S} = A^L.A^S$$

$$(A^S)^L = A^{S.L}$$

وذلك مهما تكن الأعداد الصحيحة غير السالبة L,S .

مثال-17-

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

احسب A^2 ثم احسب A^n (n عدد صحيح غير سالب).

الحل:

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{2S} = (A^2)^S = (I_2)^S = I_2 \quad ; n = 2S$$

$$A^{2S+1} = (A^{2S}).A = I_2.A = A \quad ; n = 2S+1$$

1-5-كثير حدود مصفوفة:

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من المرتبة n، وليكن $F(x)$ كثير حدود من الدرجة k يعطى بالعلاقة التالية:

$$F(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ...+ a_k.x^k$$

إن المعاملات $(a_0, a_1, ..., a_k)$ هي مقادير عددية اختيارية.

إذا بدلنا كل x بــ A نحصل على:

$$F(A) = a_0.I_0 + a_1.A + a_2.A^2 + ...+ a_k.A^k$$

نسمي $F(A)$ كثير حدود المصفوفة A .

مرتبة كثير الحدود $F(A)$ هي نفسها مرتبة المصفوفة A .

إذا كان $F(A) = O_n$ فإن المصفوفة A تكون جذراً لكثير الحدود:

$$F(A) = a_0.I_0 + a_1.A + a_2.A^2 + ...+ a_k.A^k$$

- بفــرض أن $p(x)$, $g(x)$ كثـــيرا حـــدود كيفيان و بفرض أن A مصفوفة مربعة كيفية،عندئذ يكون:

$$g(A).p(A) = p(A).g(A)$$

وذلك لأن: A^S و A^L تتبادلان كما رأينا.

مثلاً نجد أن:

$$(A^2 + A + I)(A - I) = (A - I)(A^2 + A + I) = A^3 - I$$

مثال-18-

إذا كان لدينا:

$$F(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + 4$$

وكانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

أوجد $F(A)$ ماذا تستنتج ؟

الحل: إن:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \\ 16 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -4 \\ 16 & 20 & 10 \\ -40 & -44 & -20 \end{bmatrix}$$

وبالتالي :

$$F(A) = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -4 \\ 16 & 20 & 10 \\ -40 & -44 & -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -16 & -24 & -16 \\ 64 & 80 & 40 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ -24 & -36 & -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نستنتج أن المصفوفة A هي جذراً لكثير الحدود .

مثال-19-

أوجد $F(A)$ إذا كان $F(x) = 2x^3 - 3x + 5$ والمصفوفة A هي :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

نبدل في كثير الحدود $F(x)$ كل x بــ A نحصل على :

$$F(A) = 2A^3 - 3A + 5I$$

$$F(A) = 2\begin{bmatrix} 11 & 38 \\ 57 & 106 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 76 \\ 114 & 212 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 30 & 70 \\ 105 & 205 \end{bmatrix}$$

الآن وقــبل مــتابعة دراسة المصفوفات وخاصة لإيجاد مقلوب مصفوفة فلا بد لنا من دراســة معيــن(محــدد) مصفوفة والتعرف على خواص المعينات ، وذلك لاستخدامها لاحقاً.

1-6-المعينات(المحددات) :

1-تعاريف:

أ- المعين من المرتبة الثانية الموافق للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

هو العبارة $a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$ ونرمز له بأحد الرموز التالية:

$$\Delta \quad , \quad |A| \quad , \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \det A$$

ويكون:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

نســمي الأعــداد $a_{11}, a_{22}, a_{21}, a_{12}$ عناصــر المعين، بينما الأعداد a_{11}, a_{22} تسمى عناصر القطر الرئيسي والعددان a_{21}, a_{12} تسمى عناصر القطر الثانوي.ويمكن تمثيل ذلك كما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

ب – المعين من المرتبة الثالثة الموافق للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

هو العبارة (عادة نسميها منشور المعين):

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{21}.a_{32}.a_{13}+a_{12}.a_{23}.a_{31}-$$

$$=-a_{13}.a_{22}.a_{31}-a_{12}.a_{21}.a_{33}-a_{23}.a_{32}.a_{11}$$

الذي يمكن استنتاجه بالقاعدة التالية(قاعدة المثلث):

$$\Delta=\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

مثال– ٢٠ –

احسب قيمة المعين التالي:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=3.1.(-1)+(-2).3.2+(-2).1.0-$$

$$-(1.1.2)-(-2)(-2)(-2)-3.3.0=-12$$

طريقة ساروس:

إن هــذه الطريقة تطبق فقط في حالة نشر معين من المرتبة الثالثة وتعتمد على إضافة عموديــن آخريــن إلــى المعيــن الســابق على الترتيب هما العمودين الأول والثاني ويوضــعوا في العمود الرابع والخامس ثم نأخذ جداء عناصر القطر الرئيسي والخطين الموازييــن له وتكون إشارتهما (+) ، ثم نأخذ جداء عناصر القطر الثانوي والخطيين الموازيين له وتكون إشارتهما(–).ونبين ذلك بالشكل التالي:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\quad =a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{21}.a_{32}.a_{13}+a_{12}.a_{23}.a_{31}-$$

$$-a_{13}.a_{22}.a_{31}-a_{12}.a_{21}.a_{33}-a_{23}.a_{32}.a_{11}$$

– طريقة لابلاس:

تعتمد هذه الطريقة على نشر المعين من المرتبة الثالثة بدلالة ثلاث معينات من المرتبة الثانية كما يلي:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

حيث أننا نشرنا المعين وفقاً لعناصر السطر الأول،ونلاحظ إن كل حد في هذا المنشور عــبارة عــن حاصل ضرب كل عنصر من السطر الأول في المعين الناتج من حذف السطر و العمود المارين بهذا العنصر أما إشارة هذا الحد فهي $(-1)^{i+j}$ حيث أن i تمثل رقم السطر و j تمثل رقم العمود.

ملاحظة–2–

يمكن نشر المعين وفق أي سطر فيه أو أي عمود .

ملاحظة–3–

يجــب علينا أن نميز بين المصفوفة والمعين،حيث أن المصفوفة هي عبارة عن جدول ولكن المعين فهو عبارة عن عدد أي له قيمة عددية.

مثال– ٢١ –

احسب قيمة المعين:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

يمكن حساب قيمة المعين بطريقة لابلاس كما يلي:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}-3.\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}+4.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=$$

$$=2.(6-63)-3(5-56)+4(45-48)=27$$

2-خواص المعينات:

1- إذا بادلنا في معين الأسطر بالأعمدة والأعمدة بالأسطر فإن قيمة المعين لا تتغير.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2- إذا تطابق سطران أو عمودان في معين فإن قيمته تساوي الصفر.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=0$$

3- إذا بادلنا بين سطرين أو عمودين في معين فإن إشارة المعين تتغير أي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4- إذا ضــربنا عناصــر أحــد الأسطر أو عناصر أحد الأعمدة بعدد ما $\lambda\neq 0$ فإن المعين يضرب بهذا العدد كما يلي:

$$\begin{vmatrix} \lambda.a_{11} & \lambda.a_{12} & \lambda.a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{23} \end{vmatrix}=\lambda.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5- إذا تناســبت عناصــر سطرين أو عناصر عمودين في معين فإن قيمة هذا المعين تساوي الصفر.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda.a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda.a_{22} \\ a_{21} & a_{32} & \lambda.a_{32} \end{vmatrix}=\lambda.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}=0$$

6- قيمة المعين تساوي الصفر إذا كانت عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة أصفاراً.

7- إذا كانــت عناصــر سطر أو عناصر عمود تتألف من مجموع عددين فإن المعين يتألف من مجموع معينين.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12}+c_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22}+c_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_{n2}+c_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & c_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & c_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مثال–22–

انشر المعين:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

بسهولة نجد أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2+(-2) & 1+1 & (-1)+3 & 3+3 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

وهو المطلوب.

8- إذا أضفنا إلى عناصر سطر(أو عناصر عمود) عناصر سطر آخر (عناصر عمود آخر) مضروبة بعدد ما $\lambda \neq 0$ فإن قيمة المعين لا تتغير.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda .a_{13} & a_{12} & .a_{13} \\ a_{21} + \lambda .a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} + \lambda .a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ويتم البرهان على هذه الخاصة وذلك حسب الخاصتين (5) و (7) .

9- معين مصفوفة مثلثية (عليا أو سفلى) يساوي جداء عناصر قطرها الرئيسي.

البرهان:

إذا نشرنا معين المصفوفة المثلثية العليا التالية A وفق العمود الأول ثم الثاني وهكذا على التوالي فنجد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det A = |A| = a_{11}.a_{22}........a_{nn}$$

- أما إذا نشرنا معين المصفوفة المثلثية السفلى التالية وفق السطر الأول ثم السطر الثاني وهكذا على التوالي نجد:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$|B| = \det B = b_{11}.b_{22}.......b_{nn}$$

مثال-23-

انشر المعين:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 16 & 24 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 16 & 24 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

حيث أخرجنا العامل المشترك 4 في السطر الثالث، ثم لاحظنا أنه تساوى لدينا السطرين الثالث والرابع.

مثال-24-

انشر المعين:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

حيث بادلنا أولاً بين السطرين الأول والثالث،ثم نشرنا بالنسبة للسطر الأول.

$$\Delta = -2. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ 4 & -13 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -13 & -1 \end{vmatrix}$$

حيث طرحنا من العمود الثاني ثلاث أمثال العمود الأول،كما طرحنا العمود الأول من العمود الثالث،ثم نشرنا بالنسبة للسطر الأول.

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 13 & -1 \end{vmatrix} = 44$$

حيث أخرجنا العامل المشترك (1-) من العمود الأول خارج المعين ثم نشرنا المعين.

مثال-25-

احسب قيمة المعين التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

الحل:

إذا أضفنا السطر الأول إلى جميع أسطر المعين وذلك بعد ضربه بـ (1-) نحصل على المعين التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & ! & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n - 1 \end{vmatrix}$$

نلاحظ أن المعين الناتج هو عبارة عن معين مصفوفة مثلثية عليا وحسب الخاصة (9) فإن قيمته تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي، أي أن:

$$\Delta = (a_2 - 1).(a_3 - 1)............(a_n - 1)$$

3-الصغير والمتمم الجبري:

أ-تعريف الصغير: نفرض أنه لدينا المعين من المرتبة n التالي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

إذا حذفنا السطر ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j ،فنحصل على معين من المرتبة $(n-1)$.

نسمي بالتعريف هذا المعين الناتج صغير العنصر a_{ij} أو الصغير المتعلق بالعنصر a_{ij} ونرمز له بالرمز Δ_{ij} .

أ-تعريف المتمم الجبري:

إذا ضربنا صغير العنصر a_{ij} بالإشارة $(-1)^{i+j}$ فإننا نحصل على مقدار نسميه المتمم الجبري للعنصر a_{ij} ونرمز له بالرمز A_{ij} ،ويكون بالتالي:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

مثال-26-

ليكن لدينا المعين التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & -2 \\ -1 & 5 & -11 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

إن صـــغير العنصر 7 هو المعين الناتج من حذف السطر والعمود اللذين يحويان هذا العنصر وهما السطر الثاني والعمود الثالث وهو المعين التالي:

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

والمتمم الجبري لهذا العنصر هو:

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\Delta_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

نظرية-1-

لتكـــن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من المرتبة n ،ولنفرض أن جميع عناصر السطر الـــذي رقمـــه i تســـاوي الصفر ما عدا العنصر $a_{ij} \neq 0$ عندئذ معين هذه المصفوفة $A = [a_{ij}]$ يساوي إلى جداء هذا العنصر a_{ij} في متممه الجبري،أي:

$$|A| = a_{ij}.A_{ij}$$

نظرية-2-

لتكـــن المصفوفتين المربعتين $A = [a_{ij}]$ و $B = \{b_{ij}\}$ من المرتبة n ، ولنفرض ان هاتيـــن المصفوفتين تختلفان فقط في عناصر السطر الذي رقمه i وفيما عدا ذلك فهما متماثلـــتان،عـــندئذ تكـــون المـــتممات الجـــبرية لعناصر هذا السطر واحدة في هاتين المصفوفتين.

البرهان:

إذا حذفـــنا الســـطر الذي رقمه i والعمود الذي رقمه j من المصفوفتين المربعتين $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ عـــندئذ نحصـــل علـــى مصفوفتين متساويتين من المرتبة $(n-1)$.

وتكون صغار عناصر السطر الذي رقمه i في المصفوفتين $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ متساوية،لتكن صغار عناصر السطر الذي رقمه i في المصفوفة $A = [a_{ij}]$ هي:

$$\Delta_{11}, \Delta_{12}, ..., \Delta_{1n}$$

وفي المصفوفة $B = [b_{ij}]$ هي:

$$\Delta'_{11}, \Delta'_{12}, ..., \Delta'_{1n}$$

من الفرض نجد أن:

$$\Delta_{ij} = \Delta'_{ij} \qquad ; j = 1,2,........n$$

لنضرب طرفي هذه المساواة بالإشارة $(-1)^{i+j}$ فنجد:

$$(-1)^{i+j}\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta'_{ij} \qquad ; j = 1,2,........n$$

وهذا يعني أن:

$$A_{ij} = A'_{ij} \qquad ; j = 1,2,........n$$

حيـــث أن A_{ij} و A'_{ij} هـــي المـــتممات الجـــبرية لعناصـــر السطر الذي رقمه i في المصفوفتين $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$.

10- إن معيـــن مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]$ من المرتبة n يساوي إلى مجموع جداءات عناصر أحد أسطر المصفوفة بالمتممات الجبرية لهذه الأسطر،أي:

$$|A| = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + ... + a_{in}.A_{in} \qquad ; i = 1,2,......., n$$

وهـــذه العلاقة تسمى منشور المعين $|A|$ وفق عناصر السطر الذي رقمه i ، وبالمثل يمكن نشر المعين $|A|$ وفق عناصر العمود الذي رقمه j كما يلي:

$$|A| = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + ... + a_{nj}.A_{nj} \quad ; j = 1,2,......., n$$

11- فـــي مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]$ من المرتبة n، نجد أن مجموع جداءات عناصر أحد الأسطر (مثلاً السطر رقم l) بالمتممات الجبرية لعناصر سطر آخر (مثلاً رقم k) يساوي الصفر ، أي:

$$a_{l1}.A_{k1} + a_{l2}.A_{k2} + ... + a_{ln}.A_{kn} = 0 \quad ; k \neq l$$

وهذه الخاصة محققة من أجل الأعمدة.

4-طرق حساب المعينات من المرتبة n :

ســـنتطرق فيما يلي إلى بعض الطرق لحساب المعينات من المرتبة n حيث يتطلب منا المعـــرفة الكاملـــة لخواص المعينات السابقة لأننا سنعتمد عليها في حساب المعين من المرتبة n .

1- طـــريقة تحويـــل جميع عناصر أحد الأسطر(أو أحد الأعمدة) إلى أصفار ما عدا عنصراً واحداً فقط.

إن هـــذه الطريقة تعتمد على الخاصة الثامنة وهي أنه إذا أضفنا إلى عناصر سطر(أو عناصـــر عمود) عناصر سطر آخر(عناصر عمود آخر) بعد ضربه بعدد $\lambda \neq 0$ فإن قيمة المعين لا تتغير.

نطـــبق هذه الخاصة لنحصل بذلك على سطر(أو عمود)جميع عناصره أصفاراً ما عدا عنصراً واحداً منه.

فإذا كان المعين المعطى من المرتبة n فإننا و بالاعتماد على النظرية(١) نجد أن هذا المعين يساوي جداء هذا العنصر بمتممه الجبري، وطبعاً هذا المتمم الجبري هو معين من المرتبة $(n-1)$ مسبوقاً بإشارة إما موجبة أو سالبة.وهكذا نكون قد خفضنا مرتبة المعيـــن مـــن المرتـــبة n إلى المرتبة $(n-1)$ ، وبنفس الطريقة يمكن تحويل حساب المعيـــن مـــن المرتـــبة $(n-1)$ إلى حساب معين من المرتبة $(n-2)$ ، وهكذا نتابع تخفيض مرتبة المعين ومن ثم نحسب قيمته.

مثال-٢٧-

احسب قيمة المعين $|A|$ للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

حيث طرحنا السطر الأول من الثاني بعد ضربه بـــ 3 والسطر الثالث من الثاني بعد ضربه بـــ2 والسطر الرابع من الثاني بعد ضربه بـــ 3 .

وبالاعتماد على العمود الأول نحصل على منشور المعين وهو:

$$|A| = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

بإضافة السطر الأول إلى السطر الثالث نجد:

$$|A| = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

2-طريقة تحويل المعين إلى الشكل المثلثي:

بالاعتماد على الخاصة التاسعة يمكننا تحويل المعين إلى الشكل المثلثي وبالتالي تصبح قيمة هذا المعين مساوية إلى جداء عناصر قطره الرئيسي.

مثال-٢٨-

احسب قيمة المعين التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 5 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 5 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & .. & 5 \end{vmatrix}_{(n)}$$

الحل:

نضيف جميع الاعمدة للعمود الأول نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5+(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 5+(n-1) & 5 & 1 & \dots & 1 \\ 5+(n-1) & 1 & 5 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5+(n-1) & 1 & 1 & \dots & 5 \end{vmatrix}_{(n)}$$

الأن نطرح السطر الأول من جميع الأسطر الأخرى فنجد أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5+(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{vmatrix}_{(n)} = [5+(n-1)]\times 4^{n-1} = (4+n)\times 4^{n-1}$$

3- طريقة إخراج المضاريب المشتركة:

هـذه الطرقة تعتمد على تحويل المعين إلى شكل تكون فيه جميع عناصر أحد الأسطر (أو أحـد الأعمدة) حاوية على مضروباً مشتركاً، فإذا كانت هذه المضاريب أولية فيما بينها فإن المعين يقبل القسمة على جدائها .

إن هذه الطريقة تستخدم في حساب معين فاندرموند من المرتبة n .

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

لحساب قيمة معين فاندرموند نتبع ما يلي:

نطرح من كل عمود العمود الذي يسبقه بعد ضربه بـــ a_1 نجد:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

وبالنشر وفق عناصر السطر الأول نجد:

$$V_n = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \dots & \dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) & \dots & \dots & a_3^{n-2}(a_3-a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \dots & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

بإمكاننا إخراج العامل المشترك فنجد أن:

$$V_n = (a_2-a_1).(a_3-a_1)........(a_n-a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

نلاحـــظ أن المعيـــن الأخـــير له نفـــس شـــكل المعيـــن الأصلي ، ولكن من المرتبة $(n-1)$.بإتباع نفس الطريقة بشكل متتالي نجد أن:

$$V_n = \prod_{i>j}(a_i - a_j) \quad ; \quad i = 1,2,....., n$$
$$j = 1,2,........ n$$

مثالاً على ذلك إذا كان لدينا معين فاندرموند من المرتبة الخامسة نجد:

$$\begin{aligned} V_5 &= (a_5-a_4)(a_5-a_3)(a_5-a_2)(a_5-a_1) \\ &\quad (a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1) \\ &\quad (a_3-a_2)(a_3-a_1) \\ &\quad (a_2-a_1) \\ &= \prod_{i>j}(a_i-a_j) \end{aligned}$$

وحيث أن:

$j = 1,2,3,4,5 \quad , \quad i = 1,2,3,4,5$ و $\prod$ تشير إلى الجداء.

مثال-٢٩-

أوجد قيمة المعين التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

الحل:

إن هذا المعين هو معين فاندرموند وبالتالي فإن:

$$\Delta = (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4) = 12$$

4- طريقة دساتير التراجع:

إن هـــذه الطريقة تستخدم عند دراسة معينات من مراتب عليا، ومبدأ هذه الطريقة هو حســـاب المعيـــن مـــن المرتـــبة n بدلالة معين واحد أو أكثر من نفس شكل المعين المعطى، ولكن من مرتبة أقل ونحصل على مساواة نسميها دستور التراجع.

مثال-٣٠-

أحسب قيمة المعين التالي:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (x+1) & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (x+1) & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (x+1) & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (x+1) & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & (x+1) & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & (x+1) \end{vmatrix}_{(n)}$$

الحل:

بنشر هذا المعين وفق عناصر العمود الأول نجد:

$$\Delta_n = (x+1)\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (x+1) & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (x+1) & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (x+1) & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & (x+1) & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & (x+1) \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

ننشر المعين الموجود في الطرف الأيمن وفق عناصر السطر الأول نحصل على:

$$\Delta_n = (x+1)\Delta_{n-1} - x\Delta_{n-2} \qquad ; n \geq 3 \; ....(1)$$

حيث أن العلاقة (1) هي دستور التراجع و Δ_{n-1} ، Δ_{n-2} هي معينات لها نفس شكل المعين Δ_n ولكنها أخفض منها مرتبة.

لنحسب Δ_3 , Δ_2 فنجد أن:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x+1 & x \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = x^2 + x + 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x+1 & x & 0 \\ 1 & x+1 & x \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = x^3 + x^2 + x + 1$$

سوف نبرهن بالاستقراء على صحة العلاقة التالية:

$$\Delta_n = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 \; ....(2)$$

بالاعـــتماد علـــى دستور التراجع (1) وسوف نفرض أن العلاقة (2) محققة من أجل Δ_{n-1} ولنبرهن على أنها محققة من أجل Δ_n .

نعوض في العلاقة (1) عن Δ_{n-1} ، Δ_{n-2} بقيمها فنجد:

$$\Delta_n = (x+1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) - x(x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1) =$$

$$= (x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$$

وهو المطلوب.

5- طريقة تفريق المعين إلى مجموع معينين أو أكثر:

يمكننا الاستفادة من الخاصة السابعة من أجل تفريق المعين إلى معينين أو أكثر.

مثال-٣١-

أوجد قيمة المعين التالي:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x+1 & a & a & \dots & \dots & a & a \\ 1 & x & a & \dots & \dots & a & a \\ 1 & 0 & x & \dots & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & x & a \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

الحل:يمكننا من العمود الأول أن نفرق المعين على معينين كما يلي:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x+1 & a & a & \dots & \dots & a & a \\ 1 & x & a & \dots & \dots & a & a \\ 1 & 0 & x & \dots & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & x & a \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & \dots & a & a \\ 0 & x & a & \dots & \dots & a & a \\ 0 & 0 & x & \dots & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & x & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & \dots & a & a \\ 1 & x & a & \dots & \dots & a & a \\ 1 & 0 & x & \dots & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & x & a \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

حيث فرقنا العمود الأول بالشكل:

$$x+1, 0+1, \dots\dots, 0+1$$

يمكننا الآن حساب كل معين على حدة .

المعين الأول هو عبارة عن معين مصفوفة مثلثية عليا وقيمته بالتالي تساوي x^n وأما المعيـــن الثانـــي فـــنطرح كل سطر فيه من السطر الذي يسبقه فنجد أن قيمته تساوي $(x-a)^{n-1}$ وبالتالي فإن قيمة المعين المعطى هي:

$$\Delta_n = x^n + (x-a)^{n-1}$$

مثال-٣٢-

احسب قيمة المعين من المرتبة n التالي :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \\ x & x & x & \cdots & x & x+n \end{vmatrix}$$

الحل:

نضع عناصر السطر الأخير في هذا المعين على الشكل :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1) & (n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1) & (n-1) \\ x & x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} =$$

$$= 1\times2\times\dots\times(n-1)\times n+0 = n!$$

7-1-مقلوب مصفوفة:

1-تعاريف:

1- لتكـــن A مصفوفة مربعة، بالتعريف نقول عن المصفوفة A أنها نظامية إذا كان $|A| \neq 0$ ، ونقول أن المصفوفة شاذة إذا كان $|A| = 0$.

2- لتكـــن لديـــنا مصـــفوفة مربعة A نظامية من المرتبة n ، نسمي المصفوفة B المربعة النظامية من المرتبة n مقلوباً للمصفوفة A إذا تحققت:

$$A \,.\, B = B \,.\, A = I_n$$

حيث أن (I_n) مصفوفة مربعة واحدية.

سنرمز لمقلوب المصفوفة A بالرمز A^{-1} عندها يكون:

$$A \,.\, A^{-1} = A^{-1} A = I$$

مثال-33-

برهن على أن المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

هي مقلوب المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل: بحساب مباشر نجد أن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3- المصفوفة المساعدة لمصفوفة مربعة:

لتكن لدينا مصفوفة مربعة A من المرتبة n.

تعريف المصفوفة المساعدة للمصفوفة A :ويرمز لها بالرمز $\Gamma(A)$ كما يلي:

$$\Gamma(A) = [A_{ij}]_n^T = [A_{ji}]_n$$

أي أن المصفوفة المساعدة $\Gamma(A)$ للمصفوفة A هي منقول المصفوفة التي عناصرها هي المتممات الجبرية لعناصر المصفوفة المفروضة A .أي:

$$\Gamma(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

مثال-٣٤-

احسب المصفوفة المساعدة للمصفوفة المربعة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

المتممات الجبرية لعناصر المصفوفة A هي :

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -11 \quad , \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \quad , \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -17 \quad , \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -13$$

ومنه تكون المصفوفة المساعدة هي:

$$\Gamma(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -3 & 1 \\ -10 & 6 & -2 \\ -17 & 5 & -13 \end{bmatrix}$$

نظرية-3-

كل مصفوفة مربعة A ترتبط بمصفوفتها المساعدة $\Gamma(A)$ بالعلاقة:

$$A \,.\, \Gamma(A) = \Gamma(A) \,.\, A = |A| \,.\, I$$

البرهان:

لتكن $A=[a_{ij}]_n$ مصفوفة مربعة من المرتبة n ، ولتكن مصفوفتها المساعدة $\Gamma(A)$ ، ولنحسب الجداء $A\,.\,\Gamma(A)$ آخذين بالاعتبار الخاصتين (10) و (11) فنجد:

$$A.\Gamma(A)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix}=|A|.I_n$$

أي أن:

$$A\,.\,\Gamma(A)=|A|.I$$

وبنفس الطريقة نبرهن على أن :

$$\Gamma(A).A=|A|.I$$

وهو المطلوب.

نظرية-4-

مقلوب مصفوفة مربعة نظامية وحيد.

البرهان:

نفرض العكس وهو أن هناك مقلوبين للمصفوفة المربعة النظامية A وليكن هما B و C عندئذ نجد من تعريف مقلوب مصفوفة أن:

$$A.B=B.A=I$$

$$A.C=C.A=I$$

نأخذ الآن المقدار $C.A.B$ ونحسبه بطريقتين:

$$C.A.B=C.(A.B)=C.I=C$$

$$C.A.B=(C.A).B=I.B=B$$

بالمقارنة نجد أن $B=C$ ، أي أن المقلوب وحيد. وهو المطلوب.

مما سبق نستنتج انه لإيجاد مقلوب مصفوفة مربعة نظامية A نتبع الخطوات التالية:

1- نحسب معين المصفوفة A وحيث أن $|A|\neq 0$ لأنها نظامية.

2- نحسب المصفوفة المساعدة $\Gamma(A)$.

3- لحساب المقلوب نطبق العلاقة التالية:

$$A^{-1}=\frac{\Gamma(A)}{|A|}$$

مثال-٣٥-

أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

١-نحسب قيمة المعين $|A|=\Delta$ فنجد:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

إذاً المصفوفة A نظامية.

٢- نوجد المصفوفة المساعدة $\Gamma(A)$.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1 \quad , \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1 \quad , \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2 \quad , \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3 \quad , \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1$$

وبالتالي فإن:

$$\Gamma(A)=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

٣- نوجد المقلوب A^{-1} بالشكل:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}.\Gamma(A)=-\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

لنتحقق من صحة ذلك نجد:

$$A.A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2-خواص مقلوب مصفوفة:

1- مقلوب جداء مصفوفتين مربعتين نظاميتين يساوي جداء مقلوبي هاتين المصفوفتين ولكن بترتيب عكسي.

أي إذا كان لدينا المصفوفتين النظاميتين المربعتين $A\,,B$ فإن:

$$(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$$

البرهان:

لبرهان هذه الخاصة نلاحظ أن:

$$(A.B)(B^{-1}.A^{-1})=A(B.B^{-1}).A^{-1}=A.I\,A^{-1}=A\,.\,A^{-1}=I$$

وأيضاً:

$$(B^{-1}.A^{-1})(A.B)=.B^{-1}(A^{-1}.A).B=B^{-1}.I\;B=B^{-1}\,.\,B=I$$

وبالتالي فالخاصة صحيحة.

بنفس الطريقة تعمم الخاصة من أجل جداء عدد منته من المصفوفات المربعة النظامية من نفس المرتبة.

2- مقلوب منقول مصفوفة مربعة نظامية A يساوي منقول مقلوبها أي:

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$$

البرهان: لبرهان هذه الخاصة يكفي أن نلاحظ أن:

$$A.A^{-1}=I$$

بأخذ منقول الطرفين نجد:

$$(A.A^{-1})^T=(I)^T=I$$

ولكن الطرف الأول:

$$(A.A^{-1})^T=(A^{-1})^T.A^T$$

وبالتالي يكون:

$$(A^{-1})^T.A^T=I$$

وهذا يعني أن: $(A^{-1})^T$ هو مقلوب $(A^T)^{-1}$.

3- مقلوب المصفوفة المتناظرة هي مصفوفة متناظرة.

4- معين مقلوب المصفوفة يساوي مقلوب معين المصفوفة الأصلية أي أن:

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

5- مقلوب المصفوفة النظامية:

$$A=diag\{a_{11},a_{22},a_{33},\dots\dots\dots\dots,a_{nn}\}$$

هو المصفوفة القطرية:

$$A^{-1}=diag\left\{\frac{1}{a_{11}},\frac{1}{a_{22}},\frac{1}{a_{33}}\dots\dots\dots\dots,\frac{1}{a_{nn}}\right\}$$

6- إذا كـــان مقلـ وب مصفوفة مربعة نظامية A يساوي إلى منقولها عندها نقول عن المصفوفة A أنها مصفوفة عمودية (متعامدة).

7- مقلـــوب مصـــفوفة مثلثـــية عادية(أي جميع عناصر القطر الرئيسي غير مساوية للصـــفر) هو مصفوفة مثلثية لها نفس الأبعاد والطبيعة ويمكن حساب المقلوب مباشرة كما هو في المثال التالي.

مثال-٣٦-

أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

الحل:

بفرض أن:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}$$

نقوم بحساب الجداء $A.A^{-1}=I$ أي:

$$A.A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

نجد أن:

$$a_{11}=1 \quad , \quad a_{12}+3a_{22}=0 \quad , \quad 3a_{22}=1 \quad , \quad a_{13}+3a_{23}+2a_{33}=0$$

$$3a_{22}=1 \quad , \quad 3a_{23}+a_{33}=0 \quad , \quad 2a_{33}=1$$

و بالتالي نجد أن:

$$a_{11}=1 \quad , \quad a_{12}=-1 \quad , \quad a_{22}=\frac{1}{3}$$

$$a_{13}=\frac{1}{2} \quad , \quad a_{23}=-\frac{1}{6} \quad , \quad a_{33}=\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن :

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

1-8-رتبة مصفوفة- التحويلات الأولية على المصفوفات

1- رتبة مصفوفة:

لتكـــن المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ نرمز لرتبة المصفوفة A بالرمز $r(A)$. نقول إن رتبة المصفوفة A تساوي k أي أن $r(A)=k$ إذا كان:

1) – يوجد صغير واحد على الأقل M من المرتبة k قيمته لا تساوي الصفر.

2) – كل صغير من مرتبة أعلى من k يساوي الصفر.

ملاحظة-4-

إن الصـــغير M مـــن المرتـــبة k للمصفوفة A هو معين المصفوفة المربعة من المرتـــبة k و التـــي عناصـــرها متوضـــعة علـــى تقـــاطع k سطراً و k عموداً من المصفوفة A حيث أن: $k=\min(m,n)$.

تعريف-1-

إن رتـــبة المصـــفوفة A تســـاوي رتبة أكبر صغير فيها لا يساوي الصفر،أو يمكننا القـــول إن رتبة المصفوفة A تساوي k إذا كان أحد الصغيرات من المرتبة k على الأقل لا يساوي الصفر، وبالتالي كل الصغيرات من المرتبة $k+1$ تكون معدومة.

مثال-٣٧-

أوجد رتبة المصفوفتين التاليتين:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 5 & 5\\ 9 & 9 & 9\end{bmatrix}$$

إن رتبة المصفوفتين A و B هي الواحد أي: $r(A)=1 \ , \ r(B)=1$.

مثال-٣٨-

أوجد رتبة المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 3 & -1 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

الحل:

إن هـــذه المصفوفة من الشكل 3×4 إذاً من أجل كل ثلاث أعمدة يمكن الحصول على صغير من المرتبة الثالثة،أحد هذه الصغيرات هو:

$$M=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=8+0+0-9-0-0=-1\neq 0$$

إذاً مرتبة هذه المصفوفة هي : $r(A)=3$.

مثال-٣٩-

أوجد رتبة المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

الحل:

نلاحظ أن المصفوفة تحوي صغاراً من المرتبة الثانية غير معدومة مثل:

$$M=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-13\neq 0$$

أيضاً يوجد صغير من المرتبة الثالثة غير معدوم :

$$M'=\begin{vmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=4+3+0-0-4-2=1$$

وإن كلا الصغيرين المجاورين لـــ M' معدوم.

$$\begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 4 & -7 & 4 & -4\end{vmatrix}=0 \quad \& \quad \begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 4 & -7 & 4 & 5\end{vmatrix}=0$$

وبالتالي فإن: $r(A)=3$.

2-التحويلات الأولية على المصفوفات:

تعريف-3-

لتكـــن لديـــنا المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$.نسمي العمليات التى نجريها على المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ (على الأسطر أو على الأعمدة) بغية تسهيل التعامل معها بالتحويلات الأولية.

1- ضرب أحد الأسطر (الأعمدة) للمصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ بعدد $\lambda\neq 0$.

2- المبادلة بين سطرين (عمودين) في المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$.

3- إضافة أحد أسطر (أعمدة) المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ إلى سطر (عمود) آخر بعد ضربه بعدد ما اختياري يختلف عن الصفر.

حســـب الـــتعريف (3) يوجـــد ستة أنواع من التحويلات الأولية ثلاث تحويلات على الأسطر وثلاث تحويلات على الأعمدة ، ويمكننا الحصول على التحويل الأولي الثاني بتطبيق عدد منته من التحويلات الأولية من الشكلين الأول والثالث.

نتيجة-1-

إذا كانت المصفوفة B تنتج من المصفوفة A بواسطة إجراء عدد منته من التحويلات الأولية فإن المصفوفة A تنتج من المصفوفة B بإجراء عدد منته من التحويلات الأولية وهي معكوس التحويلات الأولية.

ملاحظة-٥-

سوف نرمز للتحويلات الأولية الستة بالرموز:

$$1)\ R_i\to\lambda\, R_i \qquad 2)\ R_i\leftrightarrow R_j \qquad 3)\ R_i\leftrightarrow R_i+\lambda\, R_j$$

$1')\ C_i \to \lambda\, C_i \qquad 2')\ C_i \leftrightarrow C_j \qquad 3')\ C_i \leftrightarrow C_i + \lambda\, C_j \quad ; \lambda \neq 0$

تعريف-4-

نقول عن المصفوفتين A و B أنهما متكافئتان ، إذا كانت كل منهما تنتج عن الأخرى بإجراء عدد منته من التحويلات الأولية ونرمز لذلك بالرمز: $A \sim B$

مثال-٤٠-

إن المصفوفتين التاليتين متكافئتين:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 8 & 11 & 4 \\ 35 & 27 & 17 \end{bmatrix}$$

وذلك لأن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_3-2C_1]{C_2-3C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -11 & -4 \\ 9 & -27 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow{2C_1-C_2}$$

$$\xrightarrow{2C_1-C_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 8 & -11 & -4 \\ 35 & -27 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow[-C_3]{-C_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 8 & 11 & 4 \\ 35 & 27 & 17 \end{bmatrix}$$

نظرية-4-

إن تطبـــيق التحويلات الأولية على مصفوفة A لا يغير رتبتها، أي إذا كان $A \sim B$ فإن: $r(A) \sim r(B)$

ملاحظة-٦-

لحساب رتبة المصفوفة A فإننا نعتمد على التحويلات الأولية ونوجد مصفوفة مكافئة لهـــا ولتكن B ، ولكن هذه المصفوفة تمتاز بسهولة حساب رتبتها(خاصة المصفوفات من المراتب العليا).

تعريف-5-

نسمي المصفوفة التي لها الشكل العام :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(m,n)}$$

حيث أن: $a_{11} \neq 0 , a_{22} \neq 0 , ..., a_{rr} \neq 0$ مصفوفة شبه منحرفية.

نظرية-6-

يمكـــن إعـــادة كـــل مصـــفوفة علـــى مصفوفة شبه منحرفية ، وذلك بإجراء عدد من التحويلات الأولية على الأسطر(الأعمدة).

ملاحظة-7-

فـــي المصفوفة الشبه منحرفية يفضل للسهولة أن تكون العناصر a_{11} و a_{22} و... a_{rr} مساوية للواحد .

3-نتائج:

1- رتبة المصـفوفة المربعة النظامية A تساوي مرتبتها.

2- رتبة المصفوفة شبه المنحرفية تساوي عدد الأسطر غير المعدومة فيها.

3- رتبة منقول المصفوفة A تساوي رتبة المصفوفة A أي :

$$r(A) = r(A^T)$$

4- رتبة المصفوفة الواحدية من المرتبة n تساوي n أي:

$$r\,(\,I_n\,) \;=\; n$$

نظرية-7-

كـــل مصفوفة مربعة نظامية يمكن تحويلها إلى مصفوفة واحدية بإجراء عدد منته من التحويلات الأولية عليها.

مثال-٤١-

إذا كانت المصفوفة المربعة النظامية التالية: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

برهن أنه يمكن ردها إلى مصفوفة واحدية بإجراء التحويلات الأولية عليها.

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_1-R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-5R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{14}R_2}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{14}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

4-إيجاد مقلوب مصفوفة اعتماداً على التحويلات الأولية:

لتكن لدينا المصفوفة المربعة التالية $A = [a_{ij}]_n$.

بحسب النظرية السابقة (1) يمكننا الحصول على المصفوفة الواحدية من نفس المرتبة وذلك بإجراء عدد منته من التحويلات الأولية على المصفوفة A **(على الأسطر).**

لكـــن كل تحويل أولي على أسطر المصفوفة A هذا يكافئ ضرب المصفوفة A من اليسار بمصفوفة مناسبة.

بفـــرض أن المصفوفة A تتحول إلى المصفوفة الواحدية I وذلك بتطبيق التحويلات الأولـــية $D_1 , D_2 , ...D_n$ (علـــى الترتيب) وهذا يكافئ ضرب هذه المصفوفة A بالمصفوفات المربعة $B_1 , B_2 , ...B_k$ وهكذا نجد :

$$B_k . B_{k-1} .... B_2 . B_1 . A = I \qquad ....(1)$$

بضرب طرفي العلاقة (1) من اليمين بـــ A^{-1} نجد:

$$B_k . B_{k-1} .... B_2 . B_1 . I = A^{-1} \qquad ....(2)$$

العلاقـــة(2) تعني أنه بإجراء التحويلات الأولية بنفس الترتيب على المصفوفة الواحدية نحصل على مقلوب المصفوفة المربعة النظامية A (من نفس المرتبة).

ولإنجاز ذلك نتبع ما يلي:

1- نوسع المصفوفة A أفقياً بالمصفوفة الواحدية من نفس مرتبة المصفوفة A على أن نضع بين المصفوفتين خط عمودي فقط و تصبح بالشكل:

$$[A = [a_{ij}] \vdots I_n] \qquad ....(3)$$

نرمز للمصفوفة الموسعة بالرمز C .

2- نجري التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة (3) (على أسطرها) حتى تصبح المصفوفة A واحدية، فنلاحظ بنتيجة هذه التحويلات الأولية أن المصفوفة I_n تحولت إلى مصفوفة مقلوب للمصفوفة A ، وتصبح بالشكل:

$$[\, I_n \vdots A^{-1} \,]$$

فنكون قد على A^{-1} من خلال هذه التحويلات الأولية.

مثال-42-

بالاعتماد على التحويلات الأولية أوجد A^{-1} للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل:

نكتب المصفوفة الموسعة بالشكل التالي ونجري عليها التحويلات الأولية:

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1}$$

$$\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+2R_2]{R_1-2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2-3R_3]{R_1+9R_3}$$

$$\xrightarrow[R_2-3R_3]{R_1+9R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

وبالتالي تكون:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-40 & 16 & 9\\ 13 & -5 & -3\\ 5 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

مثال-43-

أوجد مقلوب المصفوفة A معتمداً على التحويلات الأولية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

الحل:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-6\neq 0$$

المصفوفة نظامية ويمكن ردها إلى مصفوفة واحدية بواسطة التحويلات الأولية.

$$C=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3+R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\Leftrightarrow R_3}$$

$$\xrightarrow{R_2\Leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{2}R_3]{\frac{1}{3}R_2}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}R_3]{\frac{1}{3}R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{R_1-R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0\end{array}\right]$$

إذاً المقلوب هو:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1/2 & 0\\ 1/3 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 0\end{bmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-6 & 3 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

مثال-44-

أوجد مقلوب المصفوفة A معتمداً على التحويلات الأولية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

الحل :

$$[A\mid I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3-5R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3-5R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1-R_2}$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{-\frac{1}{4}R_3}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-\frac{3}{2}R_3}$$

$$\xrightarrow{R_2-\frac{3}{2}R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{array}\right]\xrightarrow{R_1+\frac{1}{2}R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1+\frac{1}{2}R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{-1}{8}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{array}\right]$$

ومنه يكون :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{13}{8} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{8}\\ \frac{-15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ \frac{5}{4} & 0 & \frac{-1}{4}\end{bmatrix}$$

5-رتبة مصفوفة وعلاقتها بأسطرها وأعمدتها:

يمكننا معرفة ارتباط واستقلال جملة من الأشعة وذلك من رتبة مصفوفة.

إذا فرضنا أنه لدينا مثلاً m شعاعاً سطرياً، فلمعرفة فيما إذا كانت هذه الأشعة مرتبطة أو مستقلة خطياً نشكل المصفوفة A التي لأسطرها هذه الأشعة، ومن ثم نوجد رتبة هذه المصفوفة ولنفرض أن رتبتها $r(A)=k$ ، فإذا كانت رتبتها تساوي m أي أن $k=m$ فإن هذه الأشعة تكون مستقلة خطياً، أما إذا كانت رتبتها أقل من m فإن هذه الأشعة تكون مرتبطة خطياً.

نظرية-8-

رتبة المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ تساوي أكبر عدد من أسطرها (أعمدتها) المستقلة خطياً.

مثال-45-

ادرس إذا ما كانت الأشعة التالية مستقلة أو مرتبطة خطياً.

$$x_1=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]\quad,\quad x_2=[1\ \ -1\ \ 1\ \ -1]$$
$$x_3=[2\ \ 3\ \ 1\ \ 4]\quad,\quad x_4=[1\ \ -1\ \ -1\ \ -1]$$

الحل:

نشكل المصفوفة A التي أسطرها الأشعة المعطاة فنجد:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

بحساب رتبة المصفوفة A فنجد أن $r(A)=4$ وبالتالي فإن الأشعة $x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4$ تكون مستقلة خطياً.

مثال-46-

ادرس إذا كانت الأشعة التالية مستقلة أو مرتبطة خطياً:

$$x_1=[1\ \ 1\ \ 1]\quad,\quad x_2=[1\ \ 2\ \ 3]\quad,\quad x_3=[1\ \ 4\ \ 9]$$

الحل:

نشكل المصفوفة A التي أسطرها الأشعة المعطاة ونحسب رتبتها.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 8\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-3R_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

إن $r(A)=3$ وبالتالي فإن الأشعة مستقلة خطياً.

مثال-47-

هل الأشعة التالية مستقلة أم مرتبطة خطياً.

$$x_1=[1\ \ 1\ \ 3\ \ 1]\quad,\quad x_2=[2\ \ 1\ \ 4\ \ 3]$$
$$x_3=[1\ \ 2\ \ 5\ \ 0]\quad,\quad x_4=[5\ \ 4\ \ 13\ \ 6]$$

الحل:

نشكل المصفوفة A ونحسب رتبتها نجد:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3&1\\2&1&4&3\\1&2&5&0\\5&4&13&6\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&-1&-2&1\\0&1&2&-1\\5&4&13&6\end{bmatrix}\xrightarrow{R_4-5R_1}$$

$$\xrightarrow{R_4-5R_1}\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&-1&-2&1\\0&1&2&-1\\0&-1&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4-R_2]{R_3+R_2}\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&-1&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $r(A)=2$ وبالتالي فإن الأشعة $x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 , x_4$ مرتبطة خطياً.

مسائل محلولة

1)أحسب مقلوب المصفوفة بالاعتماد على التحويلات الأولية.

$$A=\begin{bmatrix}2&4&3&2\\3&6&5&2\\2&5&2&-3\\4&5&14&14\end{bmatrix}$$

الحل:

$$[A\vdots I_4]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}2&4&3&2&1&0&0&0\\3&6&5&2&0&1&0&0\\2&5&2&-3&0&0&1&0\\4&5&14&14&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{1/2R_1}$$

$$\xrightarrow{1/2R_1}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3/2&1&1/2&0&0&0\\3&6&5&2&0&1&0&0\\2&5&2&-3&0&0&1&0\\4&5&14&14&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-3R_1}$$

$$\xrightarrow[R_4+3R_2]{R_1-2R_2}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&7/2&11&5/2&0&-2&0\\0&1&-1&-5&-1&0&1&0\\0&0&1/2&-1&-3/2&1&0&0\\0&0&5&-5&-5&0&3&1\end{array}\right]\xrightarrow{2R_3}$$

$$\xrightarrow{2R_3}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&7/2&11&5/2&0&-2&0\\0&1&-1&-5&-1&0&1&0\\0&0&1&-2&-3&2&0&0\\0&0&5&-5&-5&0&3&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_1-7/2R_3]{R_2+R_3}$$

$$\xrightarrow[R_1-7/2R_3]{R_2+R_3}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&18&13&-7&-2&0\\0&1&0&-7&-4&2&1&0\\0&0&1&-2&-3&2&0&0\\0&0&5&-5&-5&0&3&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_4-5R_3}$$

$$\xrightarrow{R_4-5R_3}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&18&13&-7&-2&0\\0&1&0&-7&-4&2&1&0\\0&0&1&-2&-3&2&0&0\\0&0&0&5&10&-10&3&1\end{array}\right]\xrightarrow{1/5R_4}$$

$$\xrightarrow{1/5R_4}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&18&13&-7&-2&0\\0&1&0&-7&-4&2&1&0\\0&0&1&-2&-3&2&0&0\\0&0&0&1&2&-2&3/5&1/5\end{array}\right]\xrightarrow[R_2+7R_4]{R_1-18R_4}$$

$$\xrightarrow[R_2+7R_4]{R_1-18R_4}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&-23&29&-64/5&-18/5\\0&1&0&0&10&-12&26/5&7/5\\0&0&1&-2&-3&2&0&0\\0&0&0&1&2&-2&3/5&1/5\end{array}\right]\xrightarrow{R_3+2R_4}$$

$$\xrightarrow{R_3+2R_4}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&-23&29&-64/5&-18/5\\0&1&0&0&10&-12&26/5&7/5\\0&0&1&0&1&-2&6/5&2/5\\0&0&0&1&2&-2&3/5&1/5\end{array}\right]$$

و أخيراً نجد أن مقلوب المصفوفة A هو :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-23&29&-64/5&-18/5\\10&-12&26/5&7/5\\1&-2&6/5&2/5\\2&-2&3/5&1/5\end{bmatrix}$$

2) أحسب قيمة المعين من المرتبة n التالي:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&\dots&\dots&(n-2)&(n-1)&n\\2&3&\dots&\dots&(n-1)&n&(n-1)\\3&4&\dots&\dots&n&(n-1)&(n-2)\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\(n-1)&n&\dots&\dots&4&3&2\\n&(n-1)&\dots&\dots&3&2&1\end{vmatrix}$$

الحل:

نطـــرح العمود الأول من العمود الثاني والعمود الثاني من العمود الثالث وهكذا.. نجد أن:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&\dots&\dots&1&1&1\\2&1&\dots&\dots&1&1&-1\\3&1&\dots&\dots&1&-1&-1\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\(n-1)&1&\dots&\dots&-1&-1&-1\\n&-1&\dots&\dots&-1&-1&-1\end{vmatrix}$$

نجمـــع السطر الأول إلى السطر الثاني و والسطر الثالث، ....،حتى السطر الأخير فنجد:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&\dots&\dots&1&1&1\\3&2&\dots&\dots&2&2&0\\4&2&\dots&\dots&2&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\n&2&\dots&\dots&0&0&0\\(n+1)&0&\dots&\dots&0&0&0\end{vmatrix}$$

بالنشر حسب السطر الأخير ، ثم متابعة النشر في المعين الأصغر فنجد:

$$|A| = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} . 2^{n-2} . (n+1)$$

3) أحسب قيمة المعين من المرتبة n التالي:

$$\begin{vmatrix} a & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -b \\ -b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_n$$

الحل :

ننشر هذا المعين حسب عناصر العمود الأول فنجد أن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_n + (-b).(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -b \end{vmatrix}$$

وبما أن المعين الأول مثلثي علوي والمعين الثاني مثلثي سفلي فإن :

$$\Delta = a.a^{n-1} + (-b).(-1)^{n+1}(-b)^{n-1} = a^n - b^n$$

4)أحسب قيمة المعين التالي:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+(3) & 3+2(-2) & -2+2(1) & 4+2(2) \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3-3(3) & 2-3(-2) & 3-3(1) & 4-3(2) \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -6 & 8 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 00 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 8 \\ -6 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 8+8(-1) & -1 & 8+8(-1) \\ -6+8(8) & 8 & -2+8(8) \\ -2+8(4) & 4 & 5+8(4) \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 58 & 8 & 62 \\ 30 & 4 & 37 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+2}(-1). \begin{vmatrix} 58 & 62 \\ 30 & 37 \end{vmatrix} = -286$$

5) برهن أن المصفوفة A متساوية القوى:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

6) برهن أن المصفوفة A معدومة القوى من الدرجة الثالثة.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٧)- اعتبر أن المصفوفة A من المرتبة الثانية :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فإذا كان $ad - bc \neq 0$ فإن:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} . \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

مسائل غير محلولة

١)- عين قيمة كل من x , y , z بفرض أن:

$$\begin{pmatrix} x & x-y \\ x+y & x-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

٢) عين المصفوفة $A = [a_{ij}]$ حيث أن A من المرتبة 3×4 وأن $a_{ij} = 2i + j$.

٣)- بين نوع كل من المصفوفات التالية :

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & i & 3 \end{bmatrix}$$

٤) - أحسب ناتج ما يلي :

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

2) $2.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 5.\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$7)\ \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & -1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\1 & 2 & 1 & 4\\1 & 3 & -2 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\2 & 5 & 2\\-1 & 1 & -2\\-2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

٥) – إذا كانت :

$$A=\begin{bmatrix}6 & 1\\-3 & 2\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}-1 & -2\\3 & 1\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}$$

أوجد:

1) $3A-2C$ 4) $A-B$ 7) $A+B$

2) $B.A$ 5) $A.B$ 8) $2A+3B-2C$

3) A^T+C^T 6) $A.B.C$

٦)- إذا كانت لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\3 & 4 & 1\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}4 & 2 & 0 & -1\\-5 & 1 & 4 & 3\\2 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\quad,\quad D=\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}$$

والمطلوب: أحسب العمليات التالية إذا كانت معرفة.

1) $2A-3B$ 6) $B.C$

2) $A^T.B^T$ 7) $B^T.B$

3) $D.D^T$ 8) $A+B$

4) $D^T.D$ 9) $A.B$

5) $B+C$ 10) $(A.D)^T$

٧)- إذا كانت المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\\2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

فبرهن أن:

$$A^2-4A-5I=0$$

٨)- إذا كان لدينا :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\5 & 0 & 2\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\4 & 2 & 5\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\0 & 3 & 2\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

تحقق أن:

1) $A.(B+C)=AB+AC$

2) $(A+B).C=A.C+B.C$

3) $A+(B-C)=(A+B)-C$

وأوجد المصفوفة D بحيث يكون: $A+D=B$ ثم تحقق من أن:

$$D=B-A=-(A-B)$$

٩)- إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 0 & 3\\3 & -1 & 2\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 2\\-1 & 4\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\2 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

برهن أن: $(A.B).C=A.(B.C)$.

١٠)- برهن أن المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 0\\-1 & -1 & -1\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -6\\3 & 2 & 9\\-1 & -1 & -4\end{bmatrix}$$

تبديليتان.

١١)- برهن أن المصفوفة:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\2 & 1 & 0 & 0\\4 & 2 & 1 & 0\\2 & 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

هي مقلوب المصفوفة:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0 & 0\\0 & -2 & 1 & 0\\8 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

١٢)- لتكن المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\-1 & 4 & 2\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 2\\1 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1) أوجد $A.A^T$ و $A^T.A$.

2) أوجد $3A-2B$.

3) أوجد المصفوفة X التي تحقق :

$$\frac{1}{2}X+A=3B$$

١٣)-أوجد رتبة المصفوفات التالية:

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\ ,\ A_2=\begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\ ,\ A_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\2 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\2 & 4 & 3 & 2\\3 & 2 & 1 & 3\\6 & 8 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}3 & 4 & -2 & 1 & 5\\4 & -3 & 5 & 2 & -3\\5 & 15 & -11 & 1 & 18\\7 & -24 & 26 & 5 & -27\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & 1+i & -i\\0 & i & 1+2i\\1 & 1+2i & 1+i\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}3 & 3 & -1 & 4 & 1\\3 & 2 & 5 & -3 & 4\\4 & -3 & 2 & 1 & 7\\1 & 8 & 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

14)- أوجد مقلوب المصفوفات التالية إن وجد:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 3 & 0\\4 & -1 & 2\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 5 & 3\\1 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\-4 & 8 & 5\\2 & -4 & 3\end{bmatrix}\quad,\quad D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 6 & 7\\0 & 8 & -1\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 2 & 1\\5 & 2 & -3\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\3 & 2 & 0 & 0\\1 & 1 & 3 & 4\\2 & -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & -2 & 3\\6 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

15)- أحسب قيمة $\det A$ لكل من المصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\2 & 0 & -8\\-1 & -3 & 4\end{bmatrix}\ ,\ A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\k & k & k\\k^2 & k^2 & k^2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\2 & 5 & 2 & 2\\1 & 3 & 8 & 9\\1 & 3 & 2 & 2\end{bmatrix}\ ,\ A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 1 & 9 & 2\\0 & 3 & 2 & 4 & 2\\0 & 3 & 4 & 6 & 4\\1 & -1 & 2 & 2 & 2\\0 & 0 & 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

١٦) – أحسب قيمة كا من المعينات التالية :

$$1)\ \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$2)\ \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & 2 & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$3)\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$4)\ \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$5)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$$

$$6)\ \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$7)\ \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

١٧)- أوجد $F(A)$ إذا كان:

1) $F(x) = 3x^4 - 2x^2 + 3x - 1$

و حيث المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2) $F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 4$

و حيث المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

18)-حدد ما إذا كانت الأشعة التالية مستقلة أو مرتبطة خطياً، حيث أن:

1) $X_1 = [1 \ \ 3 \ \ -1]$, $X_2 = [2 \ \ 0 \ \ 1]$, $X_3 = [1 \ \ -1 \ \ 1]$

2) $X_1 = [1 \ \ 1 \ \ -1]$, $X_2 = [2 \ \ 1 \ \ 0]$, $X_3 = [-1 \ \ 1 \ \ 2]$

3) $X_1 = [1 \ \ -2 \ \ 3 \ \ 1]$, $X_2 = [3 \ \ 2 \ \ 1 \ \ -2]$, $X_3 = [1 \ \ 6 \ \ 5 \ \ -4]$

١٩) – لتكن المصفوفات التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

حيث أن : $i^2 = -1$. برهن أن :

Ibn1alwaleed@yahoo.com